Auflösungsmethoden

der

Gleichungen vom ersten und zweiten Grade

mit einer und mehreren Unbekannten.

Eine von der

philosophischen Facultät der Universität zu Rostock

genehmigte

Promotionsschrift

von

J. W. Schmitz,

Rector der höheren Stadtschule zu Schleiden.

Euskirchen, 1871.

Druck von H. F. Rosenthal.

Sr. Hochwohlgeboren

em Kaiserlichen Civil=Commissar im Elsaß,

Herrn Regierungs=Präsidenten

von Kühlwetter,

Ritter hoher Orden,

Hochachtungsvoll gewidmet

von

dem Verfasser.

Auflösungsmethoden

der Gleichungen vom ersten und zweiten Grade mit einer und mehreren Unbekannten.

Begriff und Eintheilung der Gleichungen.

Wenn man zwei mathematische Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen (=) mit einander verbindet, so entsteht eine Gleichung. Die Ausdrücke selbst heißen Seiten der Gleichungen und die einzelnen beiderseits durch Addition (+) oder Subtraction (—) verbundenen Theile der Seiten heißen Glieder derselben.

Alle Gleichungen zerfallen in zwei Klassen, identische und nicht identische. Eine identische Gleichung ist diejenige, deren Seiten auf Grund der Rechnungsgesetze nothwendig einander gleich sind, welche Werthe man auch den in derselben vorkommenden Buchstabengrößen beilegen mag. Dieselben werden wieder unterschieden in „identische im engeren Sinne", wenn die Seiten derselben auch der Form nach übereinstimmen, und in „analytische", wenn die eine Seite derselben nur eine durch arithmetische Operationen hergestellte Umformung oder Entwickelung der anderen ist, so daß die Gleichheit der Seiten von den Zahlenwerthen der Buchstabengrößen unabhängig bleibt. Doch werden die Begriffe „identisch" und „analytisch" in der Praxis gewöhnlich nicht streng unterschieden.

Beispiele): $x + z = x + z$ (identisch).

$$\left.\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ 3 \,.\, 6 + 12 &= 4 \,.\, 5 + 10\end{aligned}\right\}\text{ analytisch.}$$

Eine nicht identische (gewöhnlich synthetische oder Bestimmungsgleichung genannt) ist diejenige, deren Seiten nicht nothwendig einander gleich sind, sondern nur unter der Voraussetzung als gleich hergestellt werden können, daß eine oder mehrere in derselben vorkommende Buchstabengrößen ganz bestimmte Werthe repräsentiren. Diese Buchstabengrößen selbst heißen die Unbekannten und werden in der Regel durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet (u, v, w, x, y, z).

Die bestimmten Werthe, welche an Stelle der Unbekannten in die Gleichung eingesetzt dieser genügen, d. h. sie zu einer identischen machen, heißen Wurzeln der Gleichung. Eine Gleichung lösen, heißt demnach diese Wurzeln finden.

Jenachdem in einer Gleichung eine, zwei oder mehrere Unbekannte enthalten sind, und jenachdem diese selbst in der ersten, zweiten, ... n^{ten} Potenz vorkommen, unterscheidet man Gleichungen mit einer, zwei oder mehreren Unbekannten, sowie solche vom ersten, zweiten, ... n^{ten} Grade. Gleichungen vom zweiten Grade nennt man auch quadratische, vom dritten cubische und vom vierten biquadratische Gleichungen.

Bestimmungsgleichungen, in denen die Unbekannte mit den übrigen Ausdrücken durch die vier Species verbunden oder als Grundzahl von Potenzen und Wurzeln vorkommt, heißen algebraische Gleichungen. Ist die Unbekannte dagegen auch noch in anderer Weise z. B. als Exponent &c. mit den übrigen Ausdrücken verbunden, so nennt man sie transcendent.

Beispiele): $a + x = b + c$, $x^2 - 4ax = qb^2$ } algebraisch.

$x^x = 100x$, $\sqrt[x]{x} = \sqrt[3]{3}$ } transcendent.

Eine Gleichung umformen heißt, aus derselben durch Vornahme derselben arithmetischen Operationen auf beiden Seiten derselben neue Gleichungen bilden. Zweck dieser Umformung ist, aus einer gegebenen Gleichung durch geschickte Rechnungen schließlich eine solche herzuleiten, welche die Unbekannte auf einer Seite allein, auf der anderen aber nur bekannte Größen enthält. Gleichungen, bei denen dieses in Wirklichkeit der Fall ist, heißen geordnet. Die wichtigsten hierbei in Anwendung kommenden Operationen sind die Transposition und die Reduc-

tion d. h. ihre Befreiung von denjenigen Klammern, Nennern, Wurzeln u. s. w., welche die Unbekannte enthalten, wobei die folgenden Grundsätze zu beobachten sind:

1) Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches.
2) „ von „ subtrahirt „ „
3) „ mit „ multiplicirt „ „
4) „ durch „ dividirt „ „
5) Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten derselben die nämlichen Rechnungen vornimmt, (also auch mit derselben Zahl potenzirt, radicirt oder für dieselbe Basis logarithmirt).

A. Gleichungen vom ersten Grade.

I. Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

Welche und wie viele der oben angegebenen Grundsätze und in welcher Reihenfolge dieselben zur Auflösung einer Gleichung in Anwendung kommen, hängt insbesondere von der Natur und Beschaffenheit der Gleichung ab. Im Allgemeinen kann hier nur Folgendes bemerkt werden:

1) Wenn in einer Gleichung zusammengesetzte Producte vorkommen, so verwandle man diese durch Ausführung der an ihnen angedeuteten Rechnung in algebraische Summen d. h. man löse die Klammern auf.

2) Enthält die Gleichung Nenner (Divisoren), so multiplicire man entweder mit dem gemeinschaftlichen Nenner aller Brüche (Generalnenner) oder auch nacheinander mit jedem Nenner beide Seiten der Gleichung.

3) Transponire man die Glieder mit der Unbekannten auf die eine (gewöhnlich linke) und die Glieder ohne die Unbekannte auf die andere (gewöhnlich rechte) Seite und zwar so, daß die Unbekannte selbst positiv wird, was sich nöthigenfalls durch Multiplication mit (—1) immer bewerkstelligen läßt.

4) Sind mehrere Glieder vorhanden, in denen die Unbekannte als Factor vorkommt, so ziehe man diese dadurch in ein Glied zusammen, daß man die mit der Unbekannten verbundenen Factoren addirt oder subtrahirt und den gemeinschaftlichen Factor (die Unbekannte) stehen läßt.

5) Dividire man beide Seiten der Gleichung durch den Factor der Unbekannten.

Beispiel 1): $2x - 3(5 + \frac{3}{4}x) + \frac{2}{3}(4 - x) - \frac{1}{4}(3x - 16) = 0.$

Löst man behufs Verwandlung der zusammengesetzten Producte in algebraische Summen zunächst die Klammern auf, so erhält man

$$2x - 15 - \frac{9}{4}x + \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + 4 = 0.$$

Multiplicirt man hierauf die ganze Gleichung mit dem Generalnenner 12, so verschwinden die Nenner und es ergibt sich

$$24x - 180 - 27x + 32 - 8x - 9x + 48 = 0.$$

Transponirt man nun so, daß die Glieder mit x auf die linke und die Glieder ohne x auf die rechte Seite zu stehen kommen, so ist

$$24x - 27x - 8x - 9x = 180 - 32 - 48$$

oder zusammengezogen und mit -1 multiplicirt

$$20x = -100.$$

Dividirt man endlich beiderseits mit 20, so wird

$$x = \frac{-100}{20} = -5.$$

Beispiel 2): $\frac{x}{a - b} - \frac{5a}{a + b} = \frac{2bx}{a^2 - b^2}.$

Schafft man zuerst die Brüche fort, indem man die ganze Gleichung mit dem Generalnenner $a^2 - b^2$ multiplicirt, so erhält man

$$x(a + b) - 5a(a - b) = 2bx,$$

und wenn man die Klammern auflöst

$$ax + bx - 5a^2 + 5ab = 2bx.$$

Transponirt man nun die Glieder mit x auf die linke und die Glieder ohne x auf die rechte Seite und zieht alsdann zusammen, so ergibt sich

$$x(a - b) = 5a(a - b).$$

Dividirt man endlich durch den Factor von x, so ist

$$x = \frac{50(a - b)}{a - b} = 5a.$$

Eine zweite, weniger bekannte Methode der Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten ist die in den mathematischen Schriften der Araber vorkommende Regel vom falschen Satze, welche auch jetzt noch mit Vortheil bei der Auflösung höherer Gleichungen angewendet wird

und gewöhnlich mit dem Namen regula falsi oder falsae positionis bezeichnet wird. Dieselbe ist indischen Ursprungs und, soviel bis jetzt darüber bekannt geworden, zuerst von einem spanischen Juden Abraham Jbn Esra um das Jahr 1130 n. Chr. aus dem Indischen in's Lateinische übersetzt. Wie aus dem Titel dieser Uebersetzung*) hervorgeht, welche in Libri, Hist. des sciences math., Paris 1835, vollständig abgedruckt ist, hieß sie bei den damaligen lateinischen Schriftstellern allgemein numeratio divinationis (Divinations- oder Muthungsrechnung). Bei andern Schriftstellern findet sie sich unter dem Namen „Methode der Wagschalen" und namentlich wird sie als solche in einem um das Jahr 1222 n. Chr. verfaßten arabischen Buche Talkhys al Hissâb (Lehrbuch der Arithmetik), von Jbn Albannâ bezeichnet. Wenn auch in ihrer Anwendung nicht ganz allgemein, so ist sie dennoch eine in manchen Fällen höchst praktische Methode und kann namentlich mit Vortheil bei solchen Gleichungen angewendet werden, in welchen die Unbekannte nicht in den Divisoren der etwa vorhandenen Quotienten vorkommt. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$ax + b = c$$

anstatt des ursprünglichen Werthes von x andere von diesem verschiedene Werthe ein, so ist einleuchtend, daß alsdann auch $ax + b$ nicht mehr c, sondern offenbar von diesem verschieden sein muß. Seien die nacheinander für x in die obige Gleichung einzusetzenden Werthe w und w', und die dadurch sich ergebenden Unterschiede, welche man hier die Fehler der Gleichung nennt, bezüglich u und u', also

$$c - (aw + b) = u,$$
$$c - (aw' + b) = u',$$

und ist nun ferner (I) $w' = w + q$,

und somit (II) $c - [a(w + q) + b] = u'$,

so ist auch, weil (III) $c - (aw + b) = u$ ist,

$$\text{(IV)}\quad u' = u - aq.$$

Bezeichnet nun weiter $w + nq$ den Werth, welcher anstatt $w + q$ in die Gleichung (II) eingesetzt

---

*) Liber augmenti et diminutionis, vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum, qui Indorum dictus est, composuit.

$$u' = u - anq = 0 \text{ macht, so ist}$$

$$n = \frac{u}{aq} \text{ und, da aus Gleichung (IV) } aq = u - u',$$

somit $n = \dfrac{u}{u - u'}$ und daher die Wurzel der Gleichung

$$x = w + nq = w + \frac{uq}{u - u'} = \frac{w'u - wu'}{u - u'}$$

Beispiel 1): Nimmt man in der Gleichung

$$\tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{4}(6\tfrac{2}{9} - \tfrac{2}{3}x) = 5\tfrac{5}{6} - \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x - 35)$$

ganz beliebig und nacheinader für x die Werthe $w = 1$ und $w' = 4$ an, so ergibt sich durch einfache Rechnung als erster Fehler $u = 861$ und als zweiter Fehler $u' = 798$. Folglich als Wurzel der Gleichung

$$x = \frac{4 \,.\, 861 - 1 \,.\, 798}{861 - 798} = \frac{2646}{63} = 42.$$

Beispiel 2): Sowie die ganz willkürlich und nacheinander für x in die Gleichung

$$a\left(b + \frac{x}{c}\right) = d$$

eingesetzten Werthe $w = m$ und $w' = n$, so findet man ebenso leicht wie oben als ersten Fehler

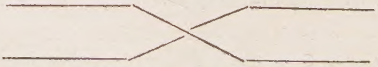
$$u = d - a\left(b + \frac{m}{c}\right),$$

als zweiten Fehler $u' = d - a\left(b + \dfrac{n}{c}\right)$

und deshalb

$$x = \frac{n\left[d - a\left(b + \frac{m}{c}\right)\right] - m\left[d - a\left(b + \frac{n}{c}\right)\right]}{d - a\left(b + \frac{m}{c}\right) - d - a\left(b + \frac{n}{c}\right)} = \frac{c(d - ab)}{a}.$$

Ueber die oben erwähnte „Methode der Wagschaalen" (im Talkhys von Jbn Albannâ mizân d. i. Bilanx, Wage- oder Proberechnung genannt), sagt Jbn Albannâ wie folgt: „Man nehme eine Wage von folgender Form



und setze den Werth über den Drehpunkt, setze auf die eine Schaale eine beliebige Zahl, setze sie alsdann für die Unbe-

kannte ein und vergleiche die ausgerechnete Größe mit derjenigen über dem Drehpunkte. Ist sie ihr gleich, so ist die Zahl auf der Schaale die gesuchte Unbekannte selbst. Ist sie davon verschieden, so notire man, wenn sie größer ist, den Ueberschuß über der Schaale, wenn sie kleiner ist, den Fehler unter der Schaale. Dann setze man auch auf die andere Schaale eine beliebige andere Zahl und verfahre ebenso. Jetzt multiplicire man den Fehler jeder Schaale mit dem Aufsatz der anderen. Sind die Fehler beide positiv oder beide negativ, so subtrahire man den kleineren vom größeren, ebenso das kleinere Product von dem größeren und dividire die Differenz der Producte durch die Differenz der Fehler. Ist hingegen der eine Fehler positiv, der andere negativ, so dividire man die Summe der Producte durch die Summe der Fehler."

Wie schon Matthiessen richtig bemerkt, gibt Jbn Albannâ die Regel nur richtig an für den Fall, daß die Werthe der Unbekannten positiv sind. Sind diese dagegen negativ, so hat die Regel nur allgemeine Gültigkeit, wenn sie von der betreffenden Stelle an so lautet: Man dividire die Differenz der Producte aus dem ersten Aufsatz mit dem zweiten Fehler und dem zweiten Aufsatz mit dem ersten Fehler durch die Differenz des zweiten und ersten Fehlers.

Beispiel 1): Setzt man in der Gleichung

$$\frac{3}{4}x - 2x - \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x = -9$$

auf die erste Schaale ganz beliebig anstatt x den Werth = 1 und auf die zweite Schaale den Werth = 2,

$6\frac{3}{10}$	-9	$7\frac{13}{20}$
2		1

so erhält man nach Substituirung dieser Werthe in die Gleichung selbst

I) $\frac{3}{4} . 1 - 2 . 1 - \frac{3}{5} . 1 + \frac{1}{2} . 1 = -1\frac{7}{10}$ oder $-9 + 7\frac{13}{20}$
und somit als erster Fehler $= + 7\frac{13}{20}$.

II) $\frac{3}{4} . 2 - 2 . 2 - \frac{3}{5} . 2 + \frac{1}{2} . 2 = -2\frac{7}{10}$ oder $-9 + 6\frac{3}{10}$
und deshalb als zweiter Fehler $= + 6\frac{3}{10}$.

Notirt man jetzt nach Jbn Albannâ die gefundenen Fehler und dividirt alsdann die Differenz des durch Multiplication des einen Fehlers mit dem anderen Aufsatz entstandenen

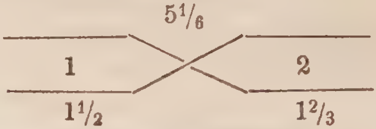
größeren und kleineren Productes durch die Differenz des größeren und kleineren Fehlers, so ergibt sich als Wurzel der Gleichung

$$x = \frac{15^3/_{10} - 6^3/_{10}}{7^{13}/_{20} - 6^3/_{10}} = \frac{9}{1^7/_{20}} = 6^2/_3.$$

Beispiel 2): Nimmt man in der Gleichung

$$5^2/_3x + 6^1/_2 - 3x - {}^5/_2x = 5^1/_6$$

für x die beliebigen Werthe 2 und 1 an und legt 2 auf die erste und 1 auf die zweite Schaale,



so ergibt sich nach Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung selbst

I) $5^2/_3 \cdot 2 + 6^1/_2 - 3 \cdot 2 - {}^5/_2 \cdot 2 = 6^5/_6$ oder $5^1/_6 + 1^2/_3$, also als erster Fehler $= + 1^2/_3$.

II) $5^2/_3 \cdot 1 + 6^1/_2 - 3 \cdot 1 - {}^5/_2 \cdot 1 = 6^2/_3$ oder $5^1/_6 + 1^1/_2$, also als zweiter Fehler $= + 1^1/_2$.

Wollte man hier nun weiter wie bei Beispiel 1) nach Jbn Albannâ verfahren, so würde man dadurch offenbar zu einem unrichtigen Resultate gelangen. Man dividire daher, wie oben angegeben, die Differenz der Producte aus dem ersten Aufsatz mit dem zweiten Fehler und dem zweiten Aufsatz mit dem ersten Fehler durch die Differenz des zweiten und ersten Fehlers. Alsdann ergibt sich als Wurzel der Gleichung

$$x = \frac{2 \cdot 1^1/_2 - 1 \cdot 1^2/_3}{1^1/_2 - 1^2/_3} = \frac{3 - 1^2/_3}{- {}^1/_6} = - 8.$$

Aufgabe zur Anwendung. Einem Neugierigen, welcher gerne wissen wollte, wie viele Schüler augenblicklich in der höheren Stadtschule zu S. wären, gab Herr N. folgende Antwort: Ein Fünftel der Schüler befindet sich in Tertia, die Hälfte derselben und noch drei sind in Sexta und Quinta, die übrigen, welche in Quarta sind, weniger den vier Schülern, die im Laufe des Schuljahres abgegangen sind, würden gerade den sechsten Theil der in den übrigen drei Klassen ausmachen, wenn in diesen ein Schüler weniger wäre, als in Wirklichkeit vorhanden sind. Wie viel Schüler waren demnach da?

I. **Auflösung.** Sind im Ganzen x Schüler vorhanden, so befindet sich $^1/_5x$ in Tertia und $^1/_2x + 3$ in Sexta und Quinta. Subtrahirt man die Summe dieser Zahlen, also $^7/_{10}x + 3$ von x, so erhält man, wie leicht begreiflich, die Schülerzahl der Quarta $x - (^7/_{10}x + 3)$, und da diese vermindert um die vier Schüler, welche abgegangen sind, ein Sechstel der in den übrigen drei Klassen betragen würde, wenn in diesen ein Schüler weniger wäre, so ergibt sich hieraus die Gleichung

$$x - (^7/_{10}x + 3) - 4 = {^1/_6}\,(^7/_{10}x + 2)$$

oder wenn man die Brüche fortschafft und ordnet

$$60x - 42x - 7x = 240 + 180 + 20$$

oder $11x = 440$ und daraus $x = \frac{440}{11} = 40.$

II. **Auflösung.** Setzt man in der obigen Gleichung ganz beliebig und nacheinander für x die Werthe $w = 1$ und $w' = 2$, so ergibt sich daraus

$$u = 429 \text{ und } u' = 418 \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{2 \,.\, 429 - 1 \,.\, 418}{429 - 418} = \frac{440}{11} = 40.$$

III. **Auflösung.**

	440	
4		10
396		330

Erste Schaale 10;
daher $60 \,.\, 10 - 42 \,.\, 10 - 7 \,.\, 10 = 110 = 440 - 330$ und somit **erster** Fehler $= - 330.$

Zweite Schale 4;
daher $60 \,.\, 4 - 42 \,.\, 4 - 7 \,.\, 4 = 44 = 440 - 396$ und somit **zweiter** Fehler $= 396.$

$$\text{Folglich } x = \frac{10 \,.\, 396 - 4 \,.\, 330}{396 - 330} = \frac{2640}{66} = 40.$$

Anmerkung. Die für die Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten angegebenen Methoden führen immer zu einem, aber auch nur zu **einem** Resultate, indem man für jeden bestimmten Werth der gegebenen Größen auch jedes Mal einen bestimmten Werth der gesuchten findet. Eine, wenn auch strenge genommen, nur scheinbare Ausnahme macht der einzige Fall, wenn die

Unbekannte durch Reduction ganz aus der Gleichung verschwindet, wie z. B. in folgender Gleichung

$$\frac{3}{4}ax + \frac{b}{2} = 2ax + 4c - 1\frac{1}{4}ax.$$

Zu bemerken ist jedoch, daß der für die Unbekannte gefundene Werth nicht allein der Gleichung an und für sich, sondern auch den Bedingungen der Aufgabe, wenn eine solche zur Bildung der Gleichung zu Grunde gelegen hat, genügen d. h. eine vernünftige Erklärung zulassen muß, anderenfalls derselbe widersinnig sein und sich nur auf einen in der Wirklichkeit nicht vorgekommenen Fall beziehen würde.

II. Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

Eine Gleichung von der Form

$$ax + by = c,$$

in welcher x und y als gesucht betrachtet werden, heißt eine Gleichung vom ersten Grade mit mehreren (hier zwei) Unbekannten; man nennt sie geordnet, wenn sie in Wirklichkeit auf diese Form gebracht ist. Zur Ermittelung mehrerer Unbekannten genügt indeß *eine* Gleichung nicht, man bedarf dazu vielmehr so vieler von einander unabhängiger Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind. Gleichungen, welche dieser Bedingung nicht genügen, von denen z. B. die eine sich durch Multiplication herleiten läßt, wie in den Beispielen

$$x + 2y = 5,$$
$$2x + 4y = 10,$$

können zur Bestimmung der Unbekannten nicht benutzt werden, und die Aufgabe, aus welcher sich diese Gleichungen ergeben haben, ist mangelhaft und unbestimmt. Sind jedoch für n Unbekannte auch n Gleichungen von den erforderlichen Eigenschaften gegeben, so läßt sich jederzeit aus dieser eine einzige Gleichung mit nur einer Unbekannten ableiten. Die verschiedenen Methoden, welche uns dazu führen, laufen alle darauf hinaus, daß man eine und dieselbe Unbekannte überall wegschafft (eliminirt), also aus n Gleichungen $n - 1$ neue Gleichungen mit nur $n - 1$ Unbekannten bildet und dieses Verfahren so lange fortsetzt, bis man zuletzt nur noch *eine* Gleichung mit *einer* Unbekannten übrig behält. Die einfachsten und gebräuchlichsten dieser Methoden, welche man deshalb auch Eliminationsmethoden nennt, sind folgende:

a) Substitutionsmethode.

1) Man suche aus einer der gegebenen Gleichungen den Werth einer Unkannten (x), indem man alle übrigen als bekannt ansieht.

2) Den so gefundenen Werth substituire man alsdann in alle anderen Gleichungen, welche diese Unbekannte enthalten, wodurch dieselbe wegfällt und anstatt der ursprünglichen n Gleichungen mit n Unbekannten, deren nur noch $n - 1$ mit $n - 1$ Unbekannten übrig bleiben.

3) Aus einer der sich so ergebenden $n - 1$ Gleichungen suche man nun den Werth einer weiteren Unbekannten (y) und verfahre wie in (2), so fällt die Unbekannte (y) aus und man erhält $n - 2$ Gleichungen mit nur $n - 2$ Unbekannten.

4) Man wiederhole das nämliche Verfahren, wodurch nach jeder Substitution eine weitere Gleichung und Unbekannte ausfällt, bis man schließlich auf eine Gleichung kommt, welche nur noch eine Unbekannte enthält.

5) Nachdem man den Werth dieser letzten Unbekannten, der sich jetzt durch bekannte Größen ausdrücken läßt, gefunden, setze man diesen in eine derjenigen abgeleiteten Gleichungen ein, welche außer der zuletzt gefundenen nur noch eine Unbekannte enthält. Dadurch wird diese ebenfalls in eine bestimmte Gleichung mit nur einer Unbekannten verwandelt, deren Werth sich nun auch durch bekannte Größen ausdrücken läßt. Fährt man auf diese Weise in umgekehrter Ordnung fort, so ergibt sich dadurch nach und nach auch der Werth der übrigen Unbekannten.

Beispiel 1): Sucht man aus der ersten der beiden Gleichungen I. $ax + by = c$; II. $a'x + b'x = c'$; die Unbekannte x, so erhält man

$$\text{III.}\quad x = \frac{c - by}{a}.$$

Substituirt man diesen Werth anstatt x in (II), so ergibt sich

$$\text{IV.}\quad a'\left(\frac{c - by}{a}\right) + b'y = c',$$

eine Gleichung, in welcher nur eine Unbekannte y vorkommt, deren Werth sich leicht finden läßt, nämlich

$$\text{V.}\quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Setzt man nun den für y gefundenen Werth in (III) anstatt dieser Unbekannten ein, so folgt

$$x = \frac{c - b\left(\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)}{a} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Beispiel 2): I. $2x - 4y + 9z = 28$, II. $7x + 3y - 5z = 3$, III. $9x + 10y - 11z = 4$.

Sucht man aus (I) den Werth für x, also

$$\text{IV.}\quad x = \frac{28 + 4y - 9z}{2},$$

und substituirt diesen Werth in (II) und (III) nämlich

$$\text{V.}\quad 196 - 34y - 73z = 6$$

und

$$\text{VI.}\quad 252 + 56y - 103z = 8,$$

so ergibt sich als Werth für y

$$\text{VII.}\quad y = \frac{73z - 190}{34}.$$

Setzt man den Werth für y in (VI) ein, so erhält man

$$\text{VIII.}\quad 252 + \frac{56(73z - 190)}{34} - 103z = 8 \text{ oder } z = 4.$$

Substituirt man nun rückwärts den für z gefundenen Werth in (VII), so ergibt sich $y = \frac{73 \cdot 4 - 190}{34} = 3$.

Endlich findet man $x = 2$, wenn man die Werthe für y und z in (I) einsetzt.

b) Comparations= oder Combinationsmethode.

1) Man suche aus jeder der gegebenen Gleichungen den Werth einer und derselben Unbekannten und setze

2) den aus der ersten Gleichung für die Unbekannte gefundenen Werth der Reihe nach jedem der aus den übrigen Gleichungen gefundenen gleich. Alsdann erhält man von n gegebenen Gleichungen mit n Unbekannten n — 1 neue Gleichungen mit n — 1 Unbekannten.

3) Dasselbe Verfahren nochmals mit den so entstandenen $n - 1$ Gleichungen wiederholt, reducirt diese auf $n - 2$ Gleichungen, in welchen auch nur $n - 2$ Unbekannte enthalten sind. Fährt man

4) so fort, so erhält man schließlich eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, deren gefundener Werth

5) in eine der früheren Gleichungen mit nur zwei Unbekannten eingesetzt, diese ebenfalls in eine solche mit nur einer Unbekannten verwandelt, die man alsdann nach den bekannten Regeln auflöst. Auf diese Weise rückwärts operirt, findet man nach und nach den Werth aller übrigen Unbekannten.

Beispiel 1): Zieht man aus den beiden Gleichungen

$$\text{I. } mx + ny = p; \quad \text{II. } rx + sy = q;$$

nacheinander die Werthe für x, also

$$\text{III. } x = \frac{p - ny}{m}; \quad \text{IV. } x = \frac{q - sy}{r};$$

und setzt diese Werthe einander gleich, so erhält man

$$\text{V. } \frac{p - ny}{m} = \frac{q - sy}{r},$$

woraus sich als Werth für y ergibt

$$\text{VI. } y = \frac{mq - rp}{ms - rn}.$$

Substituirt man nun den für y gefundenen Werth in einen der für x gefundenen z. B. in (III), so erhält man

$$\text{VII. } x = \frac{p - n\left(\frac{mq - rp}{ms - rn}\right)}{m} = \frac{ps - nq}{ms - rn}.$$

Anmerkung. Ebenso könnte man auch aus (I) und (II) den Werth für y suchen und aus der Gleichsetzung dieser Werthe x bestimmen.

Beispiel 2): Aus den drei Gleichungen

$$\text{I. } 4x + 3y + 2z = 18; \quad \text{II. } 3x + 10y + 5z = 43;$$
$$\text{III. } 5x + 7y + 3z = 31;$$

ergeben sich für x folgende Werthe

$$\text{IV. } x = \frac{18 - 3y - 2z}{4}; \quad \text{V. } x = \frac{43 - 10y - 5z}{3}$$
$$\text{VI. } x = \frac{31 - 7y - 3z}{5}.$$

Verbindet man je zwei dieser Werthe durch das Gleichheitszeichen, so erhält man

$$\text{VII.}\ \frac{18 - 3y - 2z}{4} = \frac{43 - 10y - 5z}{3}$$

$$\text{VIII.}\ \frac{43 - 10y - 5z}{3} = \frac{31 - 7y - 3z}{5},$$ woraus sich ergibt

$$\text{IX.}\ y = \frac{118 - 14z}{31} \text{ und X. } y = \frac{122 - 16z}{29}.$$

Durch Gleichsetzung der für y gefundenen Werthe entsteht die Gleichung

$$\text{XI.}\ \frac{118 - 14z}{31} = \frac{122 - 16z}{29},$$ woraus $z = 4$ ist.

Setzt man nun den Werth für z in (IX), so wird

$$\text{XII.}\ y = \frac{118 - 14 \cdot 4}{31} = 2.$$

Durch weitere Substitution der für z und y gefundenen Werthe in eine der obigen Gleichungen für x, z. B. in (IV) erhält man $\text{XIII.}\ x = \frac{18 - 6 - 8}{4} = 1.$

c) Additions- oder Subtractionsmethode (auch Algorithmus genannt).

1) Von einer gegebenen Anzahl Gleichungen verbinde man zunächst zwei derselben, die hierzu am bequemsten erscheinen, nachdem man die Coefficienten ein und derselben zu eliminirenden Unbekannten, wenn sie nicht schon gleich waren, vorher durch Multiplication gleich gemacht hat, jenachdem ihre Vorzeichen gleich oder ungleich sind, durch Addition oder Subtraction, wodurch man eine neue Gleichung erhält, in welcher diese Unbekannte nicht mehr vorkommt.

2) Sind unter den gegebenen Gleichungen noch andere vorhanden, welche dieselbe Unbekannte enthalten, so verbinde man die erste der vorigen unter Beobachtung desselben Verfahrens wie in (1) mit jeder der noch übrigen und man behält aus n dieser Gleichungen deren nur noch $n - 1$, in denen diese Unbekannte fehlt. Alle anderen der gegebenen Gleichungen, in denen diese Unbekannte nicht enthalten ist, bleiben dabei bestehen.

3) Setzt man dieses Verfahren mit den noch übrigen $n - 1$ Gleichungen fort, so kommt man schließlich zu einer solchen mit nur einer Unbekannten, deren Werth sich nach den bekannten Regeln leicht finden läßt.

4) Den gefundenen Werth kann man nun zur Ermittelung der anderen Unbekannten entweder rückwärts nach und nach substituiren oder das obige Eliminationsverfahren in Bezug auf jede derselben anwenden.

Beispiel 1): Um in den Gleichungen

$$\text{I.}\quad ax + by = c;\quad \text{II.}\quad dx + fy = g,$$

in denen sowohl die Coefficienten von x als auch von y ungleich sind, zunächst x zu eliminiren, multiplicire man (I) mit f und (II) mit b, wodurch man erhält

$$\text{III.}\quad afx + bfy = cf;\quad \text{IV.}\quad bdx + bfg = bg.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$\text{V.}\quad x(af - bd) = cf - bg \text{ und } x = \frac{cf - bg}{af - bd}.$$

Um nun den Werth von y zu finden, setzt man entweder den Werth von x in (I) oder (II) ein, oder man wendet das zur Elimination von y beobachtete Verfahren auch zur Elimination von x an. In beiden Fällen findet man

$$y = \frac{ag - dc}{af - db}.$$

Beispiel 2): I. $x + 2y + 4z = 24$; II. $7x - y + 2z = 19$;

$$\text{III.}\quad 3x + 4y - 3z = 6.$$

Um zunächst x in (I) und (II) zu eliminiren multiplicire man (I) mit 7, wodurch sich ergibt

$$\text{IV.}\quad 7x + 14y + 28z = 168.$$

Subtrahirt man nun (II) von (IV), so verschwindet x und man erhält $\quad \text{V.}\quad 15y + 26z = 149.$

Weiter verbinde man nun (I) und (III), nachdem (I) mit dem Coefficienten von x und (III) multiplicirt worden ist, durch Subtraction, so verschwindet x und es ergibt sich

$$\text{VI.}\quad 2y + 15z = 66.$$

Aus den beiden Eliminationsgleichungen (V) und (VI) schaffe man jetzt y fort, indem man (V) mit 2 und (VI) mit 15 multiplicirt und dann subtrahirt, wodurch

$$\text{VII.}\quad 173z = 692 \text{ und } z = 4 \text{ wird.}$$

Durch Substitution des Werthes für z in (VI) findet man

$$\text{VIII.}\quad 2y + 60 = 66, \text{ woraus } y = 3,$$

und endlich, indem man beide Werthe für z und y in (I) einsetzt

$$\text{IX.}\quad x + 6 + 16 = 24 \text{ oder}$$

$$x = 2.$$

d) Bézout'sche oder französische Methode (auch Methode mit dem unbestimmten Factor genannt). *)

Hat man ganz allgemein n Gleichungen mit n Unbekannten, so multiplicire man, nachdem man vorher geordnet hat, n — 1 der gegebenen Gleichungen und zwar jede für sich mit unbestimmten d. h. demnächst noch näher zu bestimmenden Factoren. Alsdann verbinde man die so multiplicirten Gleichungen durch Addition und subtrahire von der entstandenen Summe die n^{te} nicht multiplicirte Gleichung, so erhält man eine Hauptgleichung, in welcher außer n Unbekannten auch noch n — 1 unbestimmte Größen enthalten sind. Da man nun über den Werth der letzteren beliebig verfügen kann, so liegt es sehr nahe, ihnen einen Werth beizulegen, der die Coefficienten der n — 1 Unbekannten und somit diese selbst in der Hauptgleichung in Null verwandelt, wodurch ebensoviele, also n — 1 Bedingungsgleichungen entstehen. Bestimmt man aus diesen die Werthe der eingeführten unbestimmten Größen und substituirt dieselben in die Hauptgleichung, so verschwinden dadurch die n — 1 Unbekannten aus dieser auf einmal und nur die n^{te} bleibt übrig, deren Werth sich nun leicht bestimmen läßt. Auf dieselbe Weise findet man nach und nach auch den Werth der übrigen n — 1 Unbekannten.

Beispiel 1): Multiplicirt man die erste der beiden Gleichungen I. $px + qy = r$; II. $p'x + q'y = r'$; mit einer vor der Hand noch unbestimmten Größe n, so ergibt sich

$$\text{III.} \quad npx + nqy = nr.$$

Verbindet man nun (II) und (III) der Bequemlichkeit halber hier durch Subtraction, so erhält man die Hauptgleichung

$$\text{IV.} \quad x(np - p') + y(nq - q') = nr - r',$$

in welcher außer den beiden Unbekannten, auch noch die unbestimmte Größe n enthalten ist. Setzt man jetzt in der Hauptgleichung den Coefficienten von $y = 0$, so ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$nq - q' = 0 \text{ und } n = \frac{q'}{q}.$$

*) Elémens d'algèbre par Lacroix. Paris 1815.

Substituirt man den aus dieser Bestimmungsgleichung erhaltenen Werth für n in die Hauptgleichung, nämlich

$$\text{V.}\quad x\left(\frac{pq'}{q} - p'\right) + y\left(\frac{qq'}{q} - q'\right) = \frac{q'r - qr'}{q},$$

so verschwindet y und man erhält

$$\text{VI.}\quad x\left(\frac{pq'}{q} - p'\right) = \frac{q'r - qr'}{q},$$

woraus sich ergibt $\text{VII.}\quad x = \dfrac{q'r - qr'}{pq' - p'q}.$

Auf dieselbe Weise findet man, wenn man den Coefficienten von x, nämlich $np - p' = 0$ setzt, woraus $n = \dfrac{p'}{p}$ wird,

$$\text{VIII.}\quad y = \frac{pr' - p'r}{pq' - p'q}.$$

Beispiel 2): I. $5x + 3y + 2z = 53;$
II. $3x + 2y + 4z = 42;$
III. $32x - 7y - 5z = 50.$

Multiplicirt man (II) mit m und (III) mit n, so erhält man

IV. $3mx + 2my + 4mz = 42m;$
V. $32nx - 7ny - 5nz = 50n.$

Addirt man nun (IV) und (V) und subtrahirt von der Summe dieser beiden Gleichungen (I), so ergibt sich die Hauptgleichung

$$\text{VI.}\quad x(3m + 32n - 5) + y(2m - 7n - 3) + z(4m - 5n - 2) = 42m + 50n - 53.$$

Setzt man nun 1) $2m - 7n - 3 = 0$ und
2) $4m - 5n - 2 = 0$, woraus sich ergibt

3) $m = \dfrac{7n + 3}{2}$ und

4) $m = \dfrac{5n + 2}{4}$, so ist ferner

5) $28n + 12 = 10n + 4$ und daraus

6) $n = -\,^4/_9$

und durch Substitution des Werthes von m aus Gleichung (3)

7) $m = -\,^1/_{18}$.

Die Werthe für m und n in die Hauptgleichung eingesetzt gibt

$$\text{VII.}\quad x[3(-\tfrac{1}{18}) + 32(-\tfrac{4}{9}) - 5] = 42(-\tfrac{1}{18}) + 50(-\tfrac{4}{9}) - 53$$

und daraus $x = 4.$

Setzt man ferner 8) $3m + 32n - 5 = 0$ und
9) $4m - 5n - 2 = 0$, woraus

$$10)\ m = \frac{5 - 32n}{3} \text{ und}$$

$$11)\ m = \frac{2 + 5n}{4},$$

sowie durch Gleichsetzung dieser Werthe, nämlich

$$12)\ \frac{2 + 5n}{4} = \frac{5 - 32n}{3},$$

$$13)\ n = \frac{14}{143} \text{ und } 14)\ m = \frac{267}{429} \text{ gefunden wird,}$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe in die Hauptgleichung

$$\text{VIII. } y(2 \cdot \frac{267}{429} - 7 \cdot \frac{14}{143} - 3) = 42 \cdot \frac{267}{429} + 50 \cdot \frac{14}{143} - 53$$

und daraus $y = 9$.

Setzt man endlich 15) $3m + 32n - 5 = 0$ und
16) $2m - 7n - 3 = 0$, woraus

$$17)\ m = \frac{5 - 32n}{3} \text{ und}$$

$$18)\ m = \frac{3 + 7n}{2} \text{ ist,}$$

so erhält man durch gleiches Verfahren wie oben

IX. $349z = 1047$

woraus $z = 3$.

e) Neue Methode von Matthiessen.

Sind in den aufzulösenden Gleichungen nur zwei Unbekannte enthalten, so lassen sich diese auch mit Anwendung der schon oben erwähnten regula falsi nach einer von Matthiessen (Zeitschrift für Math. u. Physik XV. 1.) beschriebenen Methode bestimmen. Dieselbe ist geometrisch analytisch und besteht in Folgendem:

Setzt man in den beiden gegebenen Gleichungen ganz beliebig und nach einander anstatt der ersten Unbekannten (x) die Werthe w und w', und bezeichnen alsdann v und v' die sich

für diesen Fall ergebenden Werthe für die zweite Unbekannte (y) in der ersten Gleichung; v″ und v‴ die Werthe derselben Unbekannten in der zweiten Gleichung, so ist:

$$\text{I.}\quad \frac{x - w}{x - w'} = \frac{v - v''}{v' - v'''}$$

und somit $x = \dfrac{w'(v - v'') - w(v' - v''')}{(v - v'') - (v' - v''')}$.

Substituirt man nun die für die zweite Unbekannte (y) aus der ersten Gleichung gefundenen Werthe v und v′ für diese Unbekannte in die erste und zweite Gleichung, und bezeichnen alsdann w und w′ wie oben die zugehörigen Werthe der ersten Unbekannten (x) in der ersten Gleichung, w″ und w‴ die Werthe für dieselbe Unbekannte in der zweiten Gleichung, so ist

$$\text{II.}\quad \frac{y - v}{y - v'} = \frac{w - w''}{w' - w'''}$$

und deshalb $y = \dfrac{v'(w - w'') - v(w' - w''')}{(w - w'') - (w' - w''')}$.

Beispiel): Seien die für die erste Unbekannte (x) in den beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad 6x - 2y = 36;\quad \text{II.}\quad 5x + 7y = 62;$$

beliebig angenommenen Werthe w = 2 und w′ = 3, so ergeben sich als die zugehörigen Werthe für die zweite Unbekannte (y) in der ersten Gleichung v = 12 und v′ = 9; in der zweiten Gleichung v″ = $7^3/_7$ und v‴ = $6^5/_7$. Also ist

$$x = \frac{3(12 - 7^3/_7) - 2(9 - 6^5/_7)}{(12 - 7^3/_7) - (9 - 6^5/_7)} = 4.$$

Substituirt man nun die für die zweite Unbekannte (y) aus der ersten Gleichung gefundenen Werthe v = 12 und v′ = 9 anstatt dieser in die erste und zweite Gleichung, so ergeben sich als Werthe für die erste Unbekannte (x) in der ersten Gleichung wie oben w = 2 und w′ = 3; in der zweiten Gleichung w″ = $-\,4^2/_5$ und w‴ = $-\,^1/_5$. Daher ist

$$y = \frac{9[2 - (-4^2/_5)] - 12[3 - (-^1/_5)]}{[2 - (-4^2/_5)] - [3 - (-^1/_5)]} = 6.$$

*

Aufgabe zur Anwendung. Der Name eines hochgeachteten und in mehrfacher Beziehung verdienten Mannes enthält 13 Buchstaben. Setzt man statt jedes Buchstabens die Zahl, welche derselbe in der Reihenfolge des Alphabets einnimmt (also a = 1, b = 2, ... y = 24, z = 25), so finden zwischen den den Namen darstellenden Zahlen folgende Beziehungen statt:

Subtrahirt	man	die	erste	Zahl	von	der	Summe	der	übrigen	so	bleibt 142
"	"	"	zweite	"	"	"	"	"	"	"	" 156
"	"	"	dritte	"	"	"	"	"	"	"	" 159
"	"	"	vierte	"	"	"	"	"	"	"	" 164
"	"	"	fünfte	"	"	"	"	"	"	"	" 144
"	"	"	sechste	"	"	"	"	"	"	"	" 168
"	"	"	siebente	"	"	"	"	"	"	"	" 162
"	"	"	achte	"	"	"	"	"	"	"	" 140
"	"	"	neunte	"	"	"	"	"	"	"	" 174
"	"	"	zehnte	"	"	"	"	"	"	"	" 156
"	"	"	elfte	"	"	"	"	"	"	"	" 156
"	"	"	zwölfte	"	"	"	"	"	"	"	" 174
"	"	"	dreizehnte	"	"	"	"	"	"	"	" 150

Wie heißt der Mann?

Auflösung. Bezeichnet man die zu suchenden Unbekannten d. h. die Zahlen resp. die dadurch bezeichneten Buchstaben des Namens der Reihenfolge nach mit m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, so daß also m den ersten, n den zweiten Buchstaben u. s. w. vorstellt, so ergeben sich den Bedingungen der Aufgabe gemäß folgende Gleichungen:

$$\text{I.}\quad -m+n+p+q+r+s+t+u+v+w+x+y+z=142$$
$$\text{II.}\quad m-n+p+q+r+s+t+u+v+w+x+y+z=156$$
$$\text{III.}\quad m+n-p+q+r+s+t+u+v+w+x+y+z=159$$
$$\text{IV.}\quad m+n+p-q+r+s+t+u+v+w+x+y+z=164$$
$$\text{V.}\quad m+n+p+q-r+s+t+u+v+w+x+y+z=144$$
$$\text{VI.}\quad m+n+p+q+r-s+t+u+v+w+x+y+z=168$$
$$\text{VII.}\quad m+n+p+q+r+s-t+u+v+w+x+y+z=162$$
$$\text{VIII.}\quad m+n+p+q+r+s+t-u+v+w+x+y+z=140$$
$$\text{IX.}\quad m+n+p+q+r+s+t+u-v+w+x+y+z=174$$
$$\text{X.}\quad m+n+p+q+r+s+t+u+v-w+x+y+z=156$$
$$\text{XI.}\quad m+n+p+q+r+s+t+u+v+w-x+y+z=156$$

XII. $m+n+p+q+r+s+t+u+v+w+x-y+z=174$
XIII. $m+n+p+q+r+s+t+u+v+w+x+y-z=150$

Um m zu eliminiren addire man Gleichung (I) zu jeder der folgenden und dividire durch 2, so erhält man

XIV. $p+q+r+s+t+u+v+w+x+y+z = 149$
XV. $n+q+r+s+t+u+v+w+x+y+z = 150$
XVI. $n+p+r+s+t+u+v+w+x+y+z = 153$
XVII. $n+p+q+s+t+u+v+w+x+y+z = 143$
XVIII. $n+p+q+r+t+u+v+w+x+y+z = 155$
XIV. $n+p+q+r+s+u+v+w+x+y+z = 152$
XX. $n+p+q+r+s+t+v+w+x+y+z = 144$
XXI. $n+p+q+r+s+t+u+w+x+y+z = 158$
XXII. $n+p+q+r+s+t+u+v+x+y+z = 144$
XXIII. $n+p+q+r+s+t+u+v+w+y+z = 144$
XXIV. $n+p+q+r+s+t+u+v+w+x+z = 158$
XXV. $n+p+q+r+s+t+u+v+w+x+y = 146$

Um n zu eliminiren subtrahire man von der Gleichung (XV) jede der folgenden, so erhält man nebst Gleichung (XIV) die folgenden:

XXVI. $p+q+r+s+t+u+v+w+x+y+z= 149$
XXVII. $-p+q \dots = -3$
XXVIII. $-p \;.\; +r \dots = 7$
XXIX. $-p \;.\;.\; +s \dots = -5$
XXX. $-p \;.\;.\;.\; +t \dots = -2$
XXXI. $-p \dots +u \dots = 9$
XXXII. $-p \dots +v \dots = -8$
XXXIII. $-p \dots +w \dots = 6$
XXXIV. $-p \dots +x \dots = 6$
XXXV. $-p \dots +y \;.\; = -8$
XXXVI. $-p \dots +z = 4$

Um p wegzuschaffen addire man zu Gleichung (XXIV) jede der folgenden, so erhält man

XXXVII. $2q+r+s+t+u+v+w+x+y+z=146$
XXXVIII. $q+2r+s+t+u+v+w+x+y+z=156$
XXXIX. $q+r+2s+t+u+v+w+x+y+z=144$

$$
\begin{array}{rl}
\text{XL.} & q + r + s + 2t + u + v + w + x + y + z = 147 \\
\text{XLI.} & q + r + s + t + 2u + v + w + x + y + z = 158 \\
\text{XLII.} & q + r + s + t + u + 2v + w + x + y + z = 141 \\
\text{XLIII.} & q + r + s + t + u + v + 2w + x + y + z = 155 \\
\text{XLIV.} & q + r + s + t + u + v + w + 2x + y + z = 155 \\
\text{XLV.} & q + r + s + t + u + v + w + x + 2y + z = 141 \\
\text{XLVI.} & q + r + s + t + u + v + w + x + y + 2z = 153
\end{array}
$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (XXXVIII) mit 2 und subtrahirt davon die Gleichung (XXXVII), und dann weiter von der Gleichung (XXXVIII) jede der folgenden, so ergibt sich

$$
\begin{array}{rllllllllllr}
\text{XLVII.} & 3r & + s & + t & + u & + v & + w & + x & + y & + z & = & 166 \\
\text{XLVIII.} & r & - s & . & . & . & . & . & . & . & = & 12 \\
\text{XLIX.} & r & . & - t & . & . & . & . & . & . & = & 9 \\
\text{L.} & r & . & . & - u & . & . & . & . & . & = & -2 \\
\text{LI.} & r & . & . & . & - v & . & . & . & . & = & 15 \\
\text{LII.} & r & . & . & . & . & - w & . & . & . & = & 1 \\
\text{LIII.} & r & . & . & . & . & . & - x & . & . & = & 1 \\
\text{LIV.} & r & . & . & . & . & . & . & - y & . & = & 15 \\
\text{LV.} & r & . & . & . & . & . & . & . & - z & = & 3
\end{array}
$$

Addirt man jetzt die Gleichungen (XLVII) bis (LV), so erhält man

$11r = 220$ und $r = 20$.

Substituirt man den Werth für r der Reihe nach in die Gleichungen (XLVIII) bis (LV), so findet man, daß

aus	$r - s = 12$	sich	ergibt	$s = 8$
„	$r - t = 9$	„	„	$t = 11$
„	$r - u = -2$	„	„	$u = 22$
„	$r - v = 15$	„	„	$v = 5$
„	$r - w = 1$	„	„	$w = 19$
„	$r - x = 1$	„	„	$x = 19$
„	$r - y = 15$	„	„	$y = 5$
„	$r - z = 17$	„	„	$z = 17$.

Durch Substitution der gefundenen 9 Werthe in die Gleichung (XXXVII) ergibt sich $q = 10$, und durch weitere Substitution des Werthes für q in Gleichung (XXVII) $p = 13$.

Setzt man endlich die gefundenen Werthe in Gleichung (XV), wodurch man erhält n = 14, und hierauf alle gefundenen Werthe in Gleichung (II), so ergibt sich die letzte der Unbekannten m = 21.

Nach der oben angenommenen Reihenfolge der Unbekannten ist daher

der erste	Buchstabe	des	Namens	der	21te	des	Alphabets	= v
„ zweite	„	„	„	„	14 „	„	„	= o
„ dritte	„	„	„	„	13 „	„	„	= n
„ vierte	„	„	„	„	10 „	„	„	= K
„ fünfte	„	„	„	„	20 „	„	„	= ü
„ sechste	„	„	„	„	8 „	„	„	= h
„ siebente	„	„	„	„	11 „	„	„	= l
„ achte	„	„	„	„	22 „	„	„	= w
„ neunte	„	„	„	„	5 „	„	„	= e
„ zehnte	„	„	„	„	19 „	„	„	= t
„ elfte	„	„	„	„	19 „	„	„	= t
„ zwölfte	„	„	„	„	5 „	„	„	= e
„ dreizehnte	„	„	„	„	17 „	„	„	= r

Anmerkung. Es ist selbstverständlich, daß zur Auflösung dieser Aufgabe auch nur elf Gleichungen genügt hätten.

B. Gleichungen vom zweiten Grade.

I. Gleichungen vom zweiten Grade mit einer Unbekannten.

Eine Gleichung von der Form

$$ax^2 + bx = c \text{ oder } ax^2 + bx - c = 0,$$

in welcher a, b und c gegebene ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen, selbst 0 nicht ausgenommen, sein können, heißt eine Gleichung vom zweiten Grade oder eine quadratische Gleichung. Doch darf sich das Nullwerden weder auf a noch auf c erstrecken, weil in diesem Falle die Gleichung aufhört quadratisch zu sein. Jenachdem in einer solchen Gleichung b = 0 oder nicht = 0 ist, verwandelt dieselbe sich in

$$1)\ ax^2 - c = 0 \text{ und } 2)\ ax^2 + bx - c = 0.$$

Gleichungen der ersten Art, in welchen das Glied mit x fehlt und nur x im Quadrate enthalten ist, heißen **rein quadratisch**; ist aber außer den Quadraten von x auch noch x in der ersten Potenz vorhanden, wie in (2), so nennt man sie **unrein oder gemischt quadratisch**.

Setzt man, da a, b und c gegebene Größen bezeichnen, die durch Division von a entstehenden und somit ebenfalls bekannten Quotienten $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so erhält man die allgemeinste Form der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px = q, \text{ und wenn } p = 0 \text{ ist,}$$
$$x^2 = q.$$

1) Reine quadratische Gleichungen.

Die Auflösung der reinen quadratischen Gleichung bietet durchaus keine Schwierigkeiten. Hat man dieselbe auf die Form

$$x^2 = q$$

gebracht, d. h. hat man dieselbe so geordnet, daß auf der einen Seite die Unbekannte im Quadrate, auf der andern nur bekannte Größen vorkommen, so braucht man nur auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszuziehen, wodurch man, da jede Quadratwurzel sowohl einer positiven als auch einer negativen Zahl gleich sein kann, erhält

$$x = +\sqrt{q} \text{ oder } x = -\sqrt{q}$$

oder nach der gewöhnlichen Schreibart

$$x = \pm\sqrt{q}, \text{ d. h. sowohl } +\sqrt{q} \text{ als auch } -\sqrt{q}$$

leisten der Gleichung Genüge. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$x^2 = q \text{ oder } x^2 - q = 0 \text{ für } q = m^2,$$
$$\text{also } x^2 - m^2 = 0, \text{ so ist offenbar}$$
$$(x + m)(x - m) = 0,$$

welcher Gleichung sowohl durch $x + m = 0$, als auch durch $x - m = 0$ Genüge geleistet wird. Nun ergibt sich aber aus der ersten dieser Bedingungsgleichungen $x = -m$ und aus der zweiten $x = +m$, woraus also hervorgeht, daß einer reinen quadratischen Gleichung immer zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von x entsprechen.

Hat die Gleichung die Form

$$x^2 + q = 0, \text{ woraus } x = \pm \sqrt{-q} \text{ ist,}$$

so erfüllt der gefundene Werth zwar die Bedingung der Gleichung, indeß gibt es weder eine positive noch eine negative Zahl, die ins Quadrat erhoben — q liefert.

Einen solchen Werth nennt man deshalb imaginär. Ist endlich $q = 0$, so fallen beide Werthe für x in den einen $x = 0$ zusammen.

Anmerkung. Aus der Betrachtung, daß

$$\sqrt{-q} = \sqrt{q} \cdot \sqrt{-1}$$

ist, folgt, daß jede imaginäre Wurzel aus einer negativen Zahl sich immer durch ein Product ersetzen läßt, welches zum einen Factor die Wurzel aus einer positiven Zahl und zum andern $\sqrt{-1}$ hat.

Beispiel 1): Ordnet man die Gleichung

$$\tfrac{2}{3}x^2 - 16\tfrac{2}{3} = 0, \text{ so erhält man } x^2 = 25.$$

Zieht man nun auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so ergibt sich $x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$.

Beispiel 2): $px^2 + qx^2 = m^2n$

oder $x^2(p + q) = m^2n$

oder $x^2 = \dfrac{m^2n}{p + q}$

oder endlich $x = \pm \sqrt{\dfrac{m^2n}{p + q}} = \pm m \sqrt{\dfrac{n}{p + q}}$.

Beispiel 3): $x^2 + q^2 = 0$

oder $x = \pm q \sqrt{-1}$.

Aufgabe zur Anwendung. Zwei Bäuerinnen A und B hatten Eier zu Markte gebracht und zwar zusammen 220 Stück. Als sie auf dem Heimwege ihr Geld zählten, fanden sie, daß sie beide gleich viel gelöst hatten, obschon die eine mehr Eier gehabt hatte, als die andere. „Hätte ich Deine Eier gehabt, sagte nun A zu B, und hätte sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich 25 Sgr. daraus gelöst.“ „Das mag wohl richtig sein“, antwortete B, „hätte ich aber Deine Eier zu meinem Preise verkauft, so hätte ich sogar 1 Thlr. 6 Sgr. daraus gelöst“. Wie viel Eier hatte demnach jede zu Markte gebracht?

Auflösung. Hatte A x Eier, so hatte B deren 220 — x. Aus diesen 220 — x Eiern würde A, wenn sie dieselben zu ihrem Preise verkauft hätte, 25 Sgr. gelöst haben; also hatte sie jedes Ei für $\frac{25}{220 - x}$ Sgr. und folglich ihre x Eier für $\frac{25x}{220 - x}$ Sgr. verkauft. — Hätte B die x Eier der A gehabt, so würde sie daraus zu ihrem Preise 36 Sgr. gelöst haben, also hatte sie ein Ei für $\frac{36}{x}$ Sgr. und somit ihre 220 — x Eier für $\frac{36(220 - x)}{x}$ Sgr. verkauft. Da nun der Erlös beider gleich groß ist, so ergibt sich

$$\frac{25x}{220 - x} = \frac{36(220 - x)}{x}$$

oder daraus $$25x^2 = 36(220 - x)^2$$

oder $$5x = 6(220 - x) \text{ und } x = 120.$$

Demnach hatte A also x = 120 und
B 220 — x = 220 — 120 = 100 Eier.

b) Unreine oder gemischte quadratische Gleichungen.

Für die Auflösung der unreinen oder gemischten quadratischen Gleichungen gibt es verschiedene Wege. Der älteste und zugleich bekannteste derselben ist die Formel von

Brahmegupta und Mohammed ben Musa *).

Dieselbe besteht in Folgendem:

Hat man die Gleichung auf die Form

$$x^2 + px = q$$

gebracht, so daß also das Quadrat der Unbekannten ohne Nenner und mit dem Coefficienten 1 und dem Vorzeichen +

---

*) Brahmegupta algebra from the sanscrit translated by Colebrooke, London, 1817.

Abu Abdallah Mohammed ben Musa al Khowaresmi algebra ou' almokabala, edited and translated by Rosen, London, 1831.

voransteht, worauf alsdann die Unbekannte in der ersten Potenz mit ihrem Coefficienten folgt, auf der anderen Seite aber blos bekannte oder gegebene Größen stehen; und versucht man nun zur Bestimmung von x hieraus die Quadratwurzel zu ziehen, so wird man sich leicht überzeugen, daß dieses nicht möglich ist, da es überhaupt keinen Ausdruck gibt, der in's Quadrat erhoben einen zweitheiligen Ausdruck liefert. Das Binom $x^2 + px$ muß daher nothwendig vorher zu einem vollständigen Quadrate ergänzt werden, was durch Vergleichung desselben mit $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nur dadurch bewirkt werden kann, daß demselben ein drittes Glied und zwar das Quadrat der Hälfte des Coefficienten von x, also $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ hinzugefügt wird. Fügt man dieses Glied zur Erhaltung der Gleichmäßigkeit auch auf der andern Seite hinzu, so erhält man

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

oder

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so ergibt sich

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

oder

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Beispiel 1): Fügt man in der Gleichung

$$x^2 - 5x = 0$$

zur Vervollständigung des Quadrats auf beiden Seiten den halben Coefficienten von x in's Quadrat erhoben hinzu, so erhält man

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}.$$

Zieht man nun auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so ergibt sich $x - \frac{5}{2} = \pm \frac{5}{2}$ und durch Transposition

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2} \text{ oder } x_1 = 5 \text{ und } x_2 = 0.$$

Beispiel 2): Ordnet man die Gleichung

$$cx + \frac{ac}{a+b} = (a+b)x^2$$

und dividirt durch den Coefficienten von x^2, so ist

$$x^2 - \frac{cx}{a+b} = \frac{ac}{(a+b)^2}.$$

Addirt man nun zur Ergänzung des Quadrates auf beiden Seiten $\left(\frac{c}{2(a+b)}\right)^2$ hinzu, so erhält man

$$x^2 - \frac{cx}{a+b} + \left(\frac{c}{2(a+b)}\right)^2 = \left(\frac{c}{2(a+b)}\right)^2 + \frac{ac}{(a+b)^2}$$

oder $$x^2 - \frac{cx}{a+b} + \left(\frac{c}{2(a+b)}\right)^2 = \frac{c^2+4ac}{4(a+b)^2}.$$

Zieht man jetzt auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so ergibt sich

$$x - \frac{c}{2(a+b)} = \pm\sqrt{\frac{c^2+4ac}{4(a+b)^2}}$$

und folglich durch Transposition

$$x_1 = \frac{c+\sqrt{c^2+4ac}}{2(a+b)} \text{ und } x_2 = \frac{c-\sqrt{c^2+4ac}}{2(a+b)}.$$

Zweite Methode der Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung von Vieta *).

Dieselbe besteht darin, die unreine quadratische Gleichung durch Wegschaffung des zweiten Gliedes von x in eine reine quadratische zu verwandeln.

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$x^2 + px = q$$

anstatt x das Binom $y + m$, worin y eine neue Unbekannte und m eine Bestimmungsgröße bezeichnet, so erhält man nach Transposition von q

$$(y+m)^2 + p(y+m) - q = 0$$

oder $$y^2 + y(2m+p) + m^2 + pm - q = 0.$$

*) Vietae, Franc. de aequationum recognitione et emendatione Paris, 1615.

Nimmt man den Werth von m so an, daß der Coefficient von y, nämlich $2m + p = 0$ wird, woraus alsdann

$$m = -\frac{p}{2}$$

ist, so erhält man durch Substitution dieses Werthes die neue Gleichung

$$y^2 + y\left(2 \cdot -\frac{p}{2} + p\right) + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} - q = 0$$

oder $y^2 - \left(\frac{p^2 + 4q}{4}\right) = 0$ und hieraus $y = \pm \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}$.

Setzt man diesen Werth in

$x = y + m = y - \frac{p}{2}$ ein, so folgt daraus

$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ und $x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$

Beispiel 1): Nachdem man in der Gleichung

$$\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}$$

die Nenner fortgeschafft und geordnet hat, erhält man

$$x^2 - 4x = 140.$$

Setzt man nun für $x = y + m$, so ist

$$(y + m)^2 - 4(y + m) = 140$$

oder $y^2 + y(2m - 4) + m^2 - 4m - 140 = 0.$

Da nun $2m - 4 = 0$, so ist $m = 2$ und die neue Gleichung durch Substitution dieses Werthes folglich

$y^2 - 144 = 0$, woraus $y = \pm 12$ sich ergibt.

Setzt man diesen Werth für y in $x = y + m = y + 2$ ein, so erhält man

$x_1 = 12 + 2 = 14$ und $x_2 = -12 + 2 = 10.$

Beispiel 2): Schafft man in der Gleichung

$$\frac{a^2x^2}{f^2} - \frac{2ax}{g} + \frac{f^2}{g^2} = 0$$

die Brüche fort und ordnet, so ergibt sich

$$x^2 - \frac{2f^2x}{ag} = \frac{f^4}{a^2g^2}.$$

Setzt man nun für $x = y + m$, so ist

$$(y + m)^2 - \frac{2f^2(y + m)}{ag} = -\frac{f^4}{a^2g^2}$$

oder $y^2 + y\left(2m - \frac{2f^2}{ag}\right) + m^2 - \frac{2f^2m}{ag} + \frac{f^4}{a^2g^2} = 0.$

Ist nun $2m - \frac{2f^2}{ag} = 0$ und hieraus $m = \frac{f^2}{ag}$, so erhält man durch Substitution dieses Werthes

$$y^2 = 0 \text{ und folglich } y = \pm 0.$$

Trägt man den für y gefundenen Werth jetzt in

$$x = y + m = y + \frac{f^2}{ag}, \text{ so findet man für}$$

$$x_1 = 0 + \frac{f^2}{ag} = \frac{f^2}{ag} \text{ und für}$$

$$x_2 = -0 + \frac{f^2}{ag} = \frac{f^2}{ag}$$

d. h. beide Werthe für x sind einander gleich.

Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichung *).

Wenn die Coefficienten einer quadratischen Gleichung vielziffrige oder gebrochene Zahlen sind, so ist die Auflösung derselben auf gewöhnlichem Wege oft sehr beschwerlich. Um diesen Uebelstand zu beseitigen und an Bequemlichkeit der Rechnung zu gewinnen, macht man dieselbe deshalb logarithmisch, wobei man Folgendes zu beobachten hat.

Hat man die Gleichung $x^2 + px + q = 0$, aus welcher die Wurzeln

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

sind, so ist es leicht diese umzuformen in

$$x_1 = -p\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}}{2}\right)$$

$$\text{und } x_2 = -p\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}}{2}\right)$$

Sollen die beiden Wurzeln reell sein, so muß 1 entweder gleich oder größer als $\frac{4q}{p^2}$ sein, und daher auch entweder

*) cfr. Schoof, Arith. u. Algeb.

$$\sqrt{1} = \sqrt{\frac{4q}{p^2}} \text{ oder } \sqrt{1} > \sqrt{\frac{4q}{p^2}}$$

$$\text{d. h. } 1 = \frac{2\sqrt{q}}{p} \text{ oder } 1 > \frac{2\sqrt{q}}{p} \text{ sein.}$$

Daraus folgt aber, daß $\frac{2\sqrt{q}}{p}$ als Sinus oder Cosinus eines Winkels betrachtet werden kann. Setzt man daher $\frac{2\sqrt{q}}{p} = \sin. \alpha$ oder auf's Quadrat erhoben $\frac{4q}{p^2} = \sin. \alpha^2$ in die obigen Wurzelgleichungen ein, so erhält man

$$x_1 = -p\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \sin. \alpha^2}}{2}\right)$$

$$\text{und } x_2 = -p\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \sin. \alpha^2}}{2}\right).$$

Weil nun $\sin. \alpha^2 + \cos. \alpha^2 = 1$ und daher

$$\cos. \alpha = \sqrt{1 - \sin. \alpha^2} \text{ ist,}$$

so ergibt sich durch Substitution dieses Werthes

$$x_1 = -p\left(\frac{1 + \cos. \alpha}{2}\right) \text{ und } x_2 = -p\left(\frac{1 - \cos. \alpha}{2}\right).$$

Nun ist aber $\frac{1 + \cos. \alpha}{2} = \cos. \frac{1}{2}\alpha^2$, und

$$\frac{1 - \cos. \alpha}{2} = \sin. \frac{1}{2}\alpha^2$$

und folglich $x_1 = -p \cos. \frac{1}{2}\alpha^2$ und $x_2 = -p \sin. \frac{1}{2}\alpha^2$.

Setzt man in diese Gleichung anstatt p den Werth, der sich aus der Bedingungsgleichung $\frac{2\sqrt{q}}{p} = \sin. \alpha$ ergibt, also $p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin. \alpha}$, so ist

$$x_1 = -\frac{2\sqrt{q}}{\sin. \alpha} \cdot \cos. \frac{1}{2}\alpha^2 \text{ und } x_2 = -\frac{2\sqrt{q}}{\sin. \alpha^2} \cdot \sin. \frac{1}{2}\alpha^2$$

oder $$x_1 = \frac{-2\sqrt{q} \cdot \cos. \frac{1}{2}\alpha^2}{2 \sin. \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos. \frac{1}{2}\alpha}$$

und $$x_2 = \frac{-2\sqrt{q} \cdot \sin. \frac{1}{2}\alpha^2}{2 \sin. \alpha \cdot \cos. \frac{1}{2}\alpha}$$

oder endlich $$x_1 = -\sqrt{q} \cdot \text{ctg. } \frac{1}{2}\alpha$$

und $$x_2 = -\sqrt{q} \cdot \text{tg. } \frac{1}{2}\alpha.$$

Hat die Gleichung die Form $x^2 + px - q = 0$, und sind die sich aus derselben ergebenden Wurzeln demnach

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

oder umgeformt

$$x_1 = -p\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}}{2}\right)$$

und

$$x_2 = -p\left(\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}}{2}\right),$$

so ist, weil hier der Werth unter dem Wurzelzeichen positiv ist, die Wurzel für jeden Werth von $\frac{4q}{p^2}$ reell.

Setzt man deshalb

$$\frac{4q}{p^2} = \text{tg. } \alpha^2 \text{ oder } \frac{2\sqrt{q}}{p} = \text{tg. } \alpha$$

in die beiden Gleichungen ein, so erhält man

$$x_1 = -p\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \text{tg. } \alpha^2}}{2}\right)$$

und

$$x_2 = -p\left(\frac{1 - \sqrt{1 + \text{tg. } \alpha^2}}{2}\right).$$

Weil nun $\text{tg. } \alpha^2 = \frac{\sin. \alpha^2}{\cos. \alpha^2} = \frac{1 - \cos. \alpha^2}{\cos. \alpha^2}$ und daher

$$1 + \text{tg. } \alpha^2 = 1 + \frac{1 - \cos. \alpha^2}{\cos. \alpha^2} = \frac{1}{\cos. \alpha^2}$$

oder $\sqrt{1 + \text{tg. } \alpha^2} = \frac{1}{\cos. \alpha}$ ist, so ist auch

$$x_1 = -p\left(\frac{1 + \frac{1}{\cos. \alpha}}{2}\right) \text{ und } x_2 = -p\left(\frac{1 - \frac{1}{\cos. \alpha}}{2}\right)$$

oder $x_1 = -p\left(\frac{1 + \cos. \alpha}{2 \cos. \alpha}\right)$ und $x_2 = p\left(\frac{1 - \cos. \alpha}{2 \cos. \alpha}\right)$

oder $x_1 = -p\left(\frac{\frac{1 + \cos. \alpha}{2}}{\cos. \alpha}\right)$ und $x_2 = p\left(\frac{\frac{1 - \cos. \alpha}{2}}{\cos. \alpha}\right)$

oder $x_1 = -p\left(\frac{\cos. \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos. \alpha}\right)$ und $x_2 = p\left(\frac{\sin. \frac{1}{2}\alpha^2}{\cos. \alpha}\right)$.

Setzt man nun für p den sich aus den obigen Bestimmungsgleichungen ergebenden Werth

$$\frac{2\sqrt{q}}{tg.\ \alpha} = \frac{2\sqrt{q}\ .\ cos.\ \alpha}{sin.\ \alpha},$$ so ergibt sich

$$x_1 = -\frac{2\sqrt{q}\ .\ cos.\ \alpha\ .\ cos.\ {}^1/_2\alpha^2}{sin.\ \alpha\ .\ cos.\ .\ \alpha}$$

und $$x_2 = \frac{2\sqrt{q}\ .\ cos.\ \alpha\ .\ sin.\ {}^1/_2\alpha^2}{sin.\ \alpha\ .\ cos.\ \alpha}$$

oder $$x_1 = -\frac{2\sqrt{q}\ .\ cos.\ {}^1/_2\alpha^2}{sin.\ \alpha}$$

und $$x_2 = \frac{2\sqrt{q}\ .\ sin.\ {}^1/_2\alpha^2}{sin.\ \alpha}$$

oder endlich $x_1 = -\sqrt{q}\ .\ ctg.\ {}^1/_2\alpha$

und $x_2 = \sqrt{q}\ .\ tg.\ {}^1/_2\alpha.$

Durch analoges Verfahren ergeben sich für die Gleichungen von der Form $x^2 - px + q = 0$ und $x^2 - px - q = 0$ die bezüglichen Wurzeln

$$x_1 = \sqrt{q}\ .\ ctg.\ {}^1/_2\alpha \text{ und } x_2 = \sqrt{q}\ .\ tg.\ {}^1/_2\alpha$$

nebst Hülfswinkel $sin.\ \alpha = \frac{2\sqrt{q}}{p}$;

sowie $x_1 = \sqrt{q}\ .\ ctg.\ {}^1/_2\alpha$ und $x_2 = -\sqrt{q}\ .\ tg.\ {}^1/_2\alpha$

mit Hülfswinkel $tg.\ \alpha = \frac{2\sqrt{q}}{p}$.

Beispiel: $x^2 + 144\ x + 379 = 0.$

Diese Gleichung ist von der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

und demnach ist $x_1 = -\sqrt{q}\ .\ ctg.\ {}^1/_2\alpha$

und $x^2 = -\sqrt{q}\ .\ tg.\ {}^1/_2\alpha.$

Setzt man nun, da $p = 144$ und $q = 379$ ist,

$$sin.\ \alpha = \frac{2\sqrt{q}}{p} = \frac{2\sqrt{379}}{144},$$

so ergibt sich vermittelst der Logarithmen:

$$\begin{aligned} log.\ 2 &= 0{,}3010300 \\ + log.\ \sqrt{q} &= 1{,}2893196 \\ + C.\ log.\ p &= 7{,}8416375 - 10 \\ \hline \text{also } log.\ sin.\ \alpha &= 9{,}4319871 - 10 \\ \alpha &= 15^0\ 41'\ 14'',\ 44 \\ {}^1/_2\alpha &= 7^0\ 50'\ 37'',\ 22. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. -\sqrt{q} &= 1{,}2893196\ \text{n} \\ \log.\ \text{ctg}.\ {}^1/_2\alpha &= 10{,}8608784 \\ \hline \text{alſo}\quad \log.\ x &= 2{,}1501980\ \text{n} \\ \text{und folglich}\quad x_1 &= -\ 141{,}32. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner iſt}\quad \log. -\sqrt{q} &= 1{,}2893196\ \text{n} \\ \log.\ \text{tg}.\ {}^1/_2\alpha &= 9{,}1391216 \\ \hline \text{alſo}\quad \log.\ x &= 0{,}4284412\ \text{n} \\ \text{und folglich}\quad x_2 &= -\ 2{,}68. \end{aligned}$$

Weitere, nur auf beſtimmte Formen der quadratiſchen Gleichung mit Vortheil anwendbare, wenn auch zum Theil höchſt intereſſante Auflöſungsmethoden von Matthieſſen (cfr. Matthieſſen algebr. Methoden und Zeitſchrift für Math. u. Phyſ.) und Anderen, mögen hier unerwähnt bleiben.

Bemerkungen und Zuſätze. Wie die reinen, ſo haben auch die unreinen oder gemiſchten quadratiſchen Gleichungen im Allgemeinen zwei Werthe (Wurzeln) für x. Sind nämlich in der auf Null reducirten Gleichung die beiden äußeren Glieder mit denſelben Vorzeichen behaftet, in welchem Falle ſich als Wurzeln ergeben

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

ſo ſind dieſe Wurzeln offenbar beide

1) reell und ungleich, wenn $p^2 > 4q$ iſt,
2) reell und gleich, wenn $p^2 = 4q$ iſt und
3) imaginär, wenn $p^2 < 4q$ iſt.

Sind die Vorzeichen der beiden äußeren Glieder der auf Null reducirten Gleichung ungleich, wodurch ſich als Wurzeln ergeben

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

ſo ſind dieſe Wurzeln, weil $p^2 + 4q$ immer poſitiv iſt, beide immer reell und ungleich.

Zuſatz 1. Auf gleiche Weiſe, wie die unreinen quadratiſchen Gleichungen, löſt man auch diejenigen höheren Gleichungen auf, in denen nur zweierlei Potenzen der unbekannten Größe vorkommen und zwar ſo, daß die eine gerade mal ſo

hoch ist, als die andere. Nur hat man zuletzt noch eine Wurzel auszuziehen vom Grade des niederen Exponenten der Unbekannten.

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$x^{2n} + px^n = q$$

für $x^n = y$ und mithin für $x^{2n} = y^2$, so verwandelt sich diese in die quadratische

$$y^2 + py = q$$

woraus $y = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ sich ergibt.

Substituirt man nun für y dessen Werth, so erhält man

$$x^n = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

und mithin $x = \sqrt{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}}$.

Zusatz 2. Kommt in einer Gleichung ein Wurzelausdruck vor, so muß dieser vorher weggeschafft werden. Man bedient sich dazu vorzugsweise zweier Methoden, von denen die erste darin besteht, daß man den Wurzelausdruck zuerst auf eine Seite schafft und dann beide Seiten mit dem Wurzelexponenten potenzirt.

Hat man z. B. die Gleichung

$$px = q \pm \sqrt{x},$$

so erhält man zunächst durch Transposition

$$px - q = \pm \sqrt{x},$$

und wenn man quadrirt

$$p^2x^2 - 2pqx + q^2 = x.$$

Transponirt man nun wieder und zieht zusammen, so ergibt sich

$$x^2 - \frac{x(1 + 2pq)}{p^2} = -\frac{q^2}{p^2},$$

und wenn man auf beiden Seiten nach Hinzufügung der quadratischen Ergänzung die Quadratwurzel auszieht

$$x - \frac{1 + 2pq}{2p^2} = + \sqrt{\frac{(1 + 2pq)^2}{4p^4} - \frac{q^2}{p^2}}$$

*

oder $x = \frac{1 + 2pq \pm \sqrt{(1 + 2pq) - 4p^2 q^2}}{2p^2}$

oder $x = \frac{1 + 2pq \pm \sqrt{1 + 4pq}}{2p^2}$.

Enthält die Gleichung mehrere Wurzelausdrücke, so muß man das vorhergehende Verfahren wiederholen und sie nach und nach wegschaffen, so folgt z. B. aus der Gleichung

$$\sqrt{x + 7} = 1 + \sqrt{2x},$$

wenn man beide Seiten in's Quadrat erhebt

$$x + 7 = 1 + 2x + 2\sqrt{2x},$$

und wenn man transponirt und wiederum quadrirt

$$(x - 6)^2 = 8x \text{ oder } x^2 - 20x + 100 = 64.$$

Zieht man nun auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus und transponirt, so ergibt sich

$$x = 10 \pm 8 \text{ d. h. } x_1 = 18 \text{ und } x_2 = 2.$$

Nach der zweiten Methode schafft man die in der Gleichung enthaltenen Wurzelgrößen dadurch fort, daß man für dieselben einfache Zeichen substituirt.

Setzt man z. B. in der Gleichung

$$px + \sqrt{qx} = s$$

anstatt $\sqrt{qx} = y$, so ist offenbar $qx = y^2$

und $x = \frac{y^2}{q}$.

Trägt man diesen Werth in die Gleichung ein, so erhält man

$$\frac{py^2}{q} + y = s \text{ oder } y^2 + \frac{qy}{p} = \frac{qs}{p},$$

woraus sich ergibt $y = \frac{- q \pm \sqrt{q^2 + 4pqs}}{2p}$

Da nun $y = \sqrt{qx}$ war, so ist

$$\sqrt{qx} = \frac{- q \pm \sqrt{q^2 + 4pqs}}{2p}$$

und wenn man auf beiden Seiten quadrirt

$$qx = \left(\frac{- q \pm \sqrt{q^2 + 4pqs}}{2p}\right)^2 = \frac{q^2 + 2pqs \mp q\sqrt{q^2 + 4pqs}}{2p^2}$$

und mithin $x = \frac{q + 2ps \mp \sqrt{q^2 + 4pqs}}{2p^2}$.

Auf ähnliche Weise behandelt man die Gleichungen, in denen mehrere Wurzelausdrücke vorkommen.

Trägt man z. B. in die Gleichung

$$\sqrt{2x + 7} = 2 + \sqrt{5 - 4x}$$

anstatt $\sqrt{2x + 7} = y$ und anstatt $\sqrt{5 - 4x} = z$, und erhebt nun die Gleichungen in's Quadrat, so erhält man folgende drei neue Gleichungen

$$\text{I)}\ y = 2 + z;\quad \text{II)}\ 2x + 7 = y^2;$$
$$\text{III)}\ 5 - 4x = z^2.$$

Da nun aus (I) $y = 2 + z$ und $y^2 = 4 + 4z + z^2$ ist, so ergibt sich durch Substituirung dieses Werthes in (II)

$$2x + 7 = 4 + 4z + z^2.$$

Setzt man nun in diese Gleichung den aus (III) hergeleiteten Werth für x, nämlich $x = \frac{5 - z^2}{4}$, so erhält man

$$\frac{5 - z^2}{2} + 7 = 4 + 4z + z^2 \text{ oder } 3z^2 + 8z = 11,$$

und daraus $$z = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{4q}{q}}$$

$$\text{d. h. } z_1 = 1 \text{ und } z_2 = -\frac{11}{3}.$$

Substituirt man diesen Werth in (III), so ergibt sich

$$x_1 = 1 \text{ und } x_2 = -\frac{19}{9}.$$

Aufgabe zur Anwendung. Fräulein N., in einer Gesellschaft um ihr Alter gefragt, gab dem indiscreten Fragesteller folgende Antwort: „Als ich zuerst das Licht der Welt erblickte, war meine Mutter gerade 24 Jahre alt. Multipliciren Sie nun das jetzige Alter meiner Mutter in Jahren ausgedrückt mit dem meinigen, so wird dadurch unser beider Alter zusammengenommen um die Zahl 696 übertroffen.“ Wie alt war Fräulein N?

Auflösung. Nimmt man das jetzige Alter von Fräulein N zu x Jahren an, so folgt aus den Bedingungen der Aufgabe, daß das jetzige Alter der Mutter x + 24 ist. Da nun

das Alter der Mutter multiplicirt mit demjenigen der Tochter um die Zahl 696 größer ist, als das Alter der Beiden zusammengenommen, so erhält man die Gleichung

$$(x + 24)x - 696 = 2x + 24$$

oder geordnet $x^2 + 22x = 720$

und folglich $x = -11 \pm 29 = 18.$

NB. Der negative Werth von x hat hier keine Bedeutung.

II. Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren Unbekannten.

Von den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist die Elementarmathematik nur diejenigen in allen Fällen zu lösen im Stande, welche zwischen zwei Unbekannten so beschaffen sind, daß die eine vom ersten und die andere vom zweiten Grade ist. Sind beide Gleichungen vom zweiten Grade oder sind sie in größerer Anzahl als zwei vorhanden, so ergeben sich in der Regel Gleichungen, welche den zweiten Grad übersteigen und im Allgemeinen nach den für einfache Gleichungen gegebenen Methoden mit Ausnahme von einzelnen Fällen unlösbar sind, und somit als nicht in den Bereich dieser Abhandlung gehörig ausgeschlossen bleiben müssen.

Hat man also zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten, welche die vorerwähnten Eigenschaften besitzen, so suche man zuerst den Werth der einen Unbekannten aus der einfachen Gleichung und setze denselben in die andere ein, so erhält man eine neue Gleichung vom zweiten Grade, in welcher nur noch eine Unbekannte vorkommt. Löst man diese Gleichung nach den bekannten Regeln auf, so ergibt sich daraus für diese Unbekannte ein zweifacher Werth, welcher rückwärts in die einfache Gleichung substituirt die beiden Werthe für die erste Unbekannte erscheinen läßt.

Beispiel 1): Aus der ersten der beiden Gleichungen

$$\text{I)}\ x + y = a; \quad \text{II)}\ x^2 + y^2 = b;$$

erhält man $x = a - y$. Setzt man diesen Werth in (II) ein, so ergibt sich

$$(a - y)^2 + y^2 = b \text{ oder } y^2 - ay = \frac{b - a^2}{2}$$

und daraus $$y - \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{2b - a^2}}{2}$$

und folglich $$y = \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}.$$

Setzt man nun den Werth für y in die Gleichung
$$x = a - y$$
ein, so erhält man
$$x = \frac{a \mp \sqrt{2b - a^2}}{2}.$$

Beispiel 2): I. $x - y = a$; II. $x^3 - y^3 = b$.

Aus (I) ergibt sich $x = a + y$.

Setzt man diesen Werth in (II) ein, so erhält man
$$(a + b)^3 - y^3 = b$$
oder $$a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^2 - y^2 = b$$
oder geordnet $$y^2 + ay = \frac{b - a^3}{3a}$$
und folglich
$$y = a - \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}}.$$

Aufgabe zur Anwendung. Zwei Körper A und B bewegen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf den Schenkeln eines rechten Winkels nach dem Scheitelpunkte, von dem A 30 und B 40 Meilen entfernt ist. Nach 2 Stunden beträgt die gegenseitige Entfernung derselben 40 und nach 9 Stunden 5 Meilen. Wie groß ist die Geschwindigkeit beider Körper?

Auflösung. Seien die Wege, welche die beiden Körper in einer Stunde zurücklegen, für $A = x$ und für $B = y$, so hat der Eine nach 2 Stunden $2x$ und der Andere $2y$ abgemacht. Die Entfernung des Einen beträgt daher noch $30 - 2x$ und die des Andern noch $40 - 2y$ von dem Scheitelpunkte. Da nun ihre gegenseitige Entfernung nach 2 Stunden 40 Meilen beträgt und somit gleich der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Katheten $30 - 2x$ und $40 - 2y$ Meilen betragen, so ergibt sich daraus die Gleichung
$$(30 - 2x)^2 + (40 - 2y)^2 = 40^2$$
oder $$\text{I. } x^2 - 30x + y^2 - 40y = -225.$$

Auf gleiche Weise erhält man, da nach 9 Stunden die gegenseitige Entfernung der beiden Körper 5 Meilen beträgt, die zweite Gleichung

$$(30 - 9x)^2 + (40 - 9y)^2 = 5^2$$

oder

$$\text{II. } 9x^2 - 270x + 9y^2 - 80y = - 275.$$

Multiplicirt man nun (I) mit 9 und subtrahirt, so ist

$$\text{III. } 210x + 280y = 1750$$

oder

$$x = \frac{25 - 4y}{3}.$$

Setzt man diesen für x gefundenen Werth in (I) so erhält man

$$\left(\frac{25 - 4y}{3}\right)^2 - 30\left(\frac{25 = 4y}{3}\right) + y^2 - 40y = - 225$$

oder

$$25y^2 - 200y = - 400$$

und folglich

$$y = 4$$

und durch weitere Substitution

$$x = 3.$$